

**Тема лекции и практики:**

**«ПОСТРОЕНИЕ ТРЕНДОВ В  
EXCEL»**

# Виды математических моделей (стандартных функций)

## Математическая модель (стандартная функция)

ПАРНАЯ (один фактор)  
 $Y = f(X)$

МНОЖЕСТВЕННАЯ (много факторов)  
 $Y=f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$

### Функция одной переменной

### Функция нескольких переменных

Вид модели	Парная модель	Тренд (частный случай парной модели)	Множественная модель
линейная	$y = ax + b$	$y = at + b$	$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b$
гиперболическая	$y = a/x + b$	$y = a/t + b$	$y = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \dots + a_n/x_n + b$
полином 2 степени	$y = ax^2 + bx + c$	$y = at^2 + bt + c$	$y = a_1x_1^2 + b_1x_1 + a_2x_2^2 + b_2x_2 + c$
полином 3 степени	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$y = at^3 + bt^2 + ct + d$	$y = a_1x_1^3 + b_1x_1^2 + c_1x_1 + a_2x_2^3 + b_2x_2^2 + c_2x_2 + d$
степенная	$y = ax^b$	$y = at^b$	$y = ax_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_n^{b_n}$
показательная	$y = ab^x$	$y = ab^t$	$y = ab_1^{x_1}b_2^{x_2}\dots b_n^{x_n}$
обратная	$y = 1/(ax + b)$	$y = 1/(at + b)$	$y = 1/(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + b)$
логарифмическая	$y = a\ln(x) + b$	$y = a\ln(t) + b$	$y = a_1\ln(x_1) + a_2\ln(x_2) + \dots + b$

## Для построения трендов нужны временные ряды прогнозируемой величины

Период, год	Порядковый номер периода	Показатель
2000	1	15
2001	2	13
2002	3	18
2003	4	14
2004	5	16
2005	6	18
2006	7	13

Период, месяц	Порядковый номер периода	Показатель
январь	1	15
февраль	2	13
март	3	18
апрель	4	14
май	5	16
июнь	6	18
июль	7	13

Период, дата	Порядковый номер периода	Показатель
01.январь	1	15
01.февраль	2	13
01.март	3	18
01.апрель	4	14
01.май	5	16
01.июнь	6	18
01.июль	7	13

Период, квартал	Порядковый номер периода	Показатель
1	1	15
2	2	13
3	3	18
4	4	14
1	5	16
2	6	18
3	7	13

Периодам нужно придать порядковые номера. Периоды должны равноотстоять друг от друга !!!!

Параметры тренда также находятся методом наименьших квадратов. Системы уравнений, которые нужно решить для нахождения параметров тренда

Линейный тренд:	$\begin{cases} \sum y = a \sum t + nb \\ \sum (yt) = a \sum (t^2) + b \sum t \end{cases}$
Гиперболический тренд:	$\begin{cases} \sum y = a \sum \frac{1}{t} + nb \\ \sum \left(\frac{y}{t}\right) = a \sum \left(\frac{1}{t^2}\right) + b \sum \frac{1}{t} \end{cases}$
Обратный тренд:	$\begin{cases} \sum \frac{1}{y} = a \sum t + nb \\ \sum \left(\frac{t}{y}\right) = a \sum (t^2) + b \sum t \end{cases}$
Степенной тренд:	$\begin{cases} \sum \lg y = b \sum \lg(t) + nA \\ \sum (\lg y \times \lg t) = b \sum (\lg t)^2 + A \sum \lg t \end{cases}$

Этапы построения трендов те же, что и построения любой математической модели:

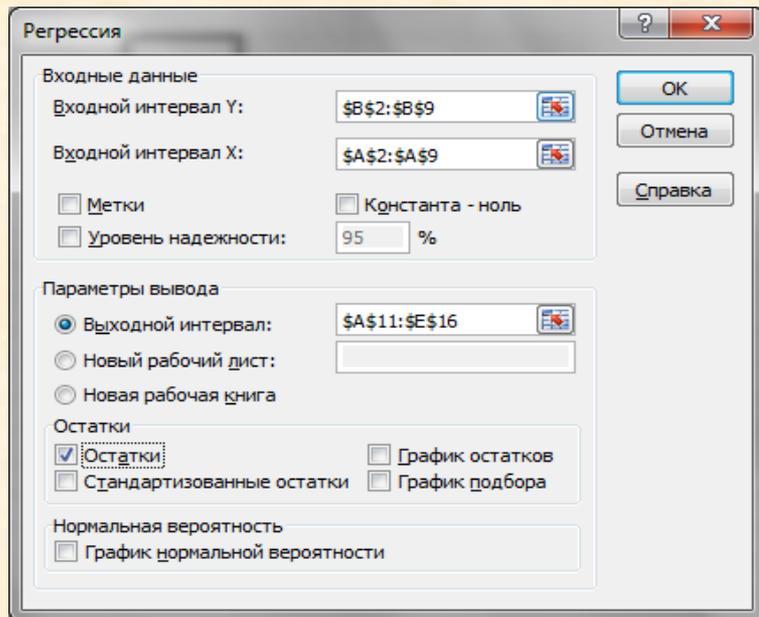
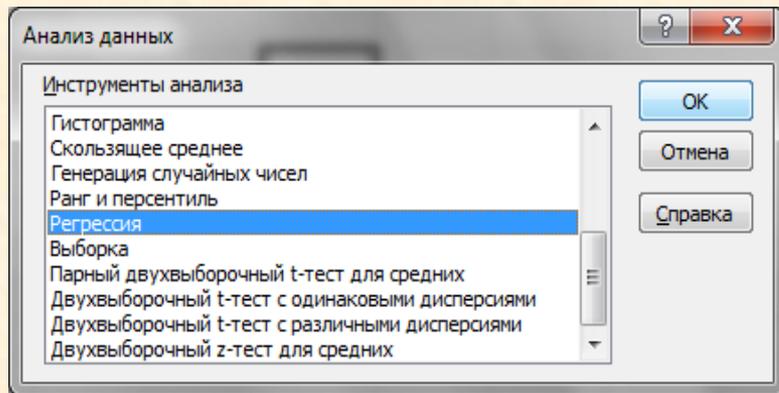
- 1) Строится точечная диаграмма по исходному временному ряду
- 2) Визуально выявляется наиболее близкая тенденция
- 3) Рассчитываются параметры тренда методом наименьших квадратов
- 4) Оценивается качество полученной модели
- 5) Тренд используется для прогноза прогнозируемой величины на будущее (в уравнение тренда вместо  $t$  подставляется порядковый номер прогнозного периода).

Параметры тренда также находятся методом наименьших квадратов. Системы уравнений, которые нужно решить для нахождения параметров тренда

Показательный тренд:	$\begin{cases} \sum \lg y = B \sum t + nA \\ \sum (\lg y \times t) = B \sum (t^2) + A \sum t \end{cases}$
Экспоненциальный тренд:	$\begin{cases} \sum \ln y = a \sum t + nb \\ \sum (\ln y \times t) = a \sum (t^2) + b \sum t \end{cases}$
Полиномиальный второй степени:	$\begin{cases} \sum y = a \sum (t^2) + b \sum t + nc \\ \sum (yt^2) = a \sum (t^4) + b \sum (t^3) + c \sum (t^2) \\ \sum (yt) = a \sum (t^3) + b \sum (t^2) + c \sum t \end{cases}$
Логарифмический:	$\begin{cases} \sum y = a \sum \ln t + nb \\ \sum (y \ln t) = a \sum (\ln t)^2 + b \sum \ln t \end{cases}$

# Построение тренда с помощью Пакета Анализа

Меню: Данные: Анализ данных



Вывод итогов

Регрессионная статистика	
Множественный R (коэффициент корреляции)	0,98447717
R-квадрат (коэффициент детерминации)	0,96919529
Нормированный R-квадрат	0,96406117
Стандартная ошибка моделирования	1,61158997
Наблюдения	8

Дисперсионный анализ					
	df (число степеней свободы)	SS	MS	F (критерий Фишера)	Значимость F
Регрессия	1	490,291667	490,2917	188,775401	9,24E-06
Остаток	6	15,5833333	2,597222		
Итого	7	505,875			

	Коэффициенты (параметры)	Стандартная ошибка параметра	t-статистика
Y-пересечение	15	1,255	11,945
Переменная X 1	3,416	0,2486	13,73

a

b

Вывод остатка		
Наблюдение	Предсказанное Y – это расчетные значения Y	Остатки (s <sub>i</sub> )
1	18,4166667	1,58333333
2	21,8333333	0,16666667
3	25,25	-0,25
4	28,6666667	-0,66666667
5	32,0833333	-2,08333333
6	35,5	-0,5
7	38,9166667	-0,91666667
8	42,3333333	2,66666667

## Построение тренда с помощью Пакета Анализа

Предполагаемый по полю корреляции (по точечной диаграмме) тренд	В поле окна РЕГРЕССИЯ «Указать диапазон игрик» указываем:	В поле окна РЕГРЕССИЯ «Указать диапазон икс» указываем:	Что рассчитывает функция РЕГРЕССИЯ и дальнейший расчет параметров
Линейный	диапазон ячеек, содержащих значения игрик	диапазон ячеек, содержащих значения порядковых номеров периодов	непосредственно параметры $a$ $b$ , которые подставляются в общий вид линейного тренда
Гиперболический	диапазон ячеек, содержащих значения игрик	диапазон ячеек, содержащих значения единица, деленная на порядковый номер периода	непосредственно параметры $a$ $b$ , которые подставляются в общий вид гиперболического тренда
Обратный	диапазон ячеек, содержащих значения единица деленная на игрик	диапазон ячеек, содержащих значения порядковых номеров периодов	непосредственно параметры $a$ $b$ , которые подставляются в общий вид обратного тренда
Степенной	диапазон ячеек, содержащих десятичный логарифм игрик	диапазон ячеек, содержащих десятичный логарифм порядкового номера периода	параметр $b$ (сразу подставляем в общий вид модели), $A$ . Далее $a$ рассчитывается по формуле $a = 10^A$ и только потом ставим в уравнение тренда

## Построение тренда с помощью Пакета Анализа

Показательный	диапазон ячеек, содержащих десятичный логарифм игрик	диапазон ячеек, содержащих значения порядковых номеров периода	параметры А, В. Далее рассчитываем по формуле: $a = 10^A$ $b = 10^B$ и только потом ставим значения параметров в тренд
Полином второй степени (парабола)	диапазон ячеек, содержащих игрик	массив ячеек, состоящей из двух колонок: значения периодов в квадрате и значения периодов	непосредственно параметры а b c , которые подставляются в общий вид полинома второй степени
Полином третьей степени	диапазон ячеек, содержащих игрик	массив ячеек, состоящей из трех колонок: значения периода в кубе, периода в квадрате и периода	непосредственно параметры а b c d , которые подставляются в общий вид полинома третьей степени
Полином четвертой степени	диапазон ячеек, содержащих игрик	массив ячеек, состоящей из четырех колонок: значения периода в 4 степени, периода в кубе, в квадрате и периода	непосредственно параметры а b c d e, которые подставляются в общий вид полинома четвертой степени

Метод построения по тренду называется **экстраполяция тренда**, т.е. выявленная тенденция выражается наиболее близкой математической моделью и продляется в будущее, т.е. в будущем периоде предполагается, что тенденция сохранится.

Показатели качества моделей – показатели, с помощью которых оценивается может ли данная модель (парная, тренда, множественная) использоваться для расчетов  $Y$ , для построения прогнозов. К показателям качества относятся следующие:

- 1) средняя абсолютная ошибка аппроксимации;
- 2) средняя относительная ошибка аппроксимации;
- 3) коэффициент детерминации;
- 4) коэффициент корреляции;
- 5) критерий Фишера;
- 6) статистики Стьюдента;
- 7) Стандартная ошибка моделирования

Все показатели качества основываются на остатках, ошибках моделирования в точках.

Ошибка или остаток в точке ( $s_i$ ) есть разность между фактическим значением  $Y$  и расчетным значением  $Y$ .

**Средняя абсолютная ошибка аппроксимации** – это среднее арифметическое значение модулей ошибок.

**Средняя относительная ошибка аппроксимации** – это среднее арифметическое относительных ошибок.

Относительная ошибка – это доля в % абсолютной ошибке в  $Y$  фактическом, т.е. нужно разделить абсолютную ошибку на  $Y$  фактический и умножить на 100 %.

Абсолютная ошибка – это разность между  $Y$  расчетным и  $Y$  фактическим по модулю.

Чем меньше средняя абсолютная и средняя относительная ошибки, тем модель точнее. Модель можно использовать для прогноза, если средняя относительная ошибка аппроксимации составляет менее 10 %.

**Коэффициент детерминации** показывает насколько правильно выбран вид модели, насколько изменения игрика обусловлены изменениями икса (иксов). **Детерминация** – это взаимосвязь определенного вида. Если детерминация строгая, т.е. строгая функциональная зависимость и ошибки аппроксимации равны 0, то коэффициент детерминации = 1. Коэффициент детерминации определяется по формуле:

$$D = \frac{\sum (Y_{\text{расчетный}} - Y_{\text{средний}})^2}{\sum (Y_{\text{фактический}} - Y_{\text{средний}})^2}$$

Y<sub>средний</sub> рассчитывается по фактическим значениям Y (по исходным статистическим данным)

Чем ближе коэффициент детерминации к 1, тем зависимость ближе к выбранной функции, тем в большей степени изменение игрика зависит от изменения икса.

**Коэффициент корреляции** – это корень квадратный из коэффициента детерминации и показывает степень зависимости игрика от икса.

Если  $K_{\text{корреляции}}$  больше 0,7, то зависимость сильная.

Если  $K_{\text{корреляции}}$  меньше 0,7, но больше 0,5, то зависимость средней степени.

Если  $K_{\text{корреляции}}$  меньше 0,5, но больше 0,3, то зависимость слабая

Если  $K_{\text{корреляции}}$  меньше 0,3 – то зависимость очень слабая

**Критерий Фишера** показывает статистическую значимость модели, т.е. насколько статистических данных было достаточно для определения модели и насколько модель может быть применена к другим данным!!!!

Для расчета критерия Фишера необходимо рассчитать три вида дисперсии:

- 1) Дисперсия общая
- 2) Дисперсия модели
- 3) Дисперсия остатков

$$\text{Дисперсия общая} = \frac{\sum(Y_{\text{фактические}} - Y_{\text{средние}})^2}{n-1}$$

n – это количество точек исходных данных.

$$\text{Дисперсия модели} = \frac{\sum(Y_{\text{расчетные}} - Y_{\text{средние}})^2}{\text{количество параметров модели}}$$

$$\text{Дисперсия остатков} = \frac{\sum(Y_{\text{расчетные}} - Y_{\text{фактические}})^2}{n - 1 - \text{количество параметров модели}}$$

**Усредненный** рассчитывается по фактическим значениям Y

**Расчетный критерий Фишера = Дисперсия модели/Дисперсия остатков**

**Затем сравнивается расчетный критерий Фишера с критическим значением (табличным).**

**Если расчетное значение превышает табличное, то модель статистически значима!!!**

**Критическое значение – это минимальное значение во сколько раз дисперсия модели должна превышать дисперсию остатков.**

# Критические значения критерия Фишера

17	19,511	20,888	21,815	22,542	23,096	23,541	23,922	24,266	24,581	24,865
18	20,888	21,815	22,542	23,096	23,541	23,922	24,266	24,581	24,865	25,119
19	21,815	22,542	23,096	23,541	23,922	24,266	24,581	24,865	25,119	25,343
20	22,542	23,096	23,541	23,922	24,266	24,581	24,865	25,119	25,343	25,530
21	23,096	23,541	23,922	24,266	24,581	24,865	25,119	25,343	25,530	25,685
22	23,541	23,922	24,266	24,581	24,865	25,119	25,343	25,530	25,685	25,811
23	23,922	24,266	24,581	24,865	25,119	25,343	25,530	25,685	25,811	25,911
24	24,266	24,581	24,865	25,119	25,343	25,530	25,685	25,811	25,911	26,000
25	24,581	24,865	25,119	25,343	25,530	25,685	25,811	25,911	26,000	26,080

26	24,865	25,119	25,343	25,530	25,685	25,811	25,911	26,000	26,080	26,150
27	30,319	31,528	32,912	34,741	40,113	43,194	44,146	44,965	45,645	46,216
28	31,391	32,620	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	46,278	46,955	47,503
29	32,461	33,711	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	47,588	48,296	48,882
30	33,530	34,800	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	48,892	49,672	50,283

Таблица П4

Распределение Фишера — Снедекора ( $F$ -распределение). Значения  $F_{\text{табл}}$   
 Первое значение соответствует вероятности  $\alpha = 0,05$ , второе — вероятности  $0,01$ , третье — вероятности  $0,001$ ,  
 где  $v_1$  — число степеней свободы числителя, а  $v_2$  — число степеней свободы знаменателя

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$
1	161,45 4052,18 405 284,07	199,50 4999,50 499 999,50	215,71 5403,35 540 379,20	224,58 5624,58 562 499,58	230,16 5763,65 576 404,56	233,99 5858,99 585 937,11	238,88 5981,07 598 144,16	243,91 6106,32 610 667,82	249,05 6234,63 623 497,46	254,31 6365,68 636 604,08
2	18,51 98,50 998,50	19,00 99,00 999,00	19,16 99,17 999,17	19,25 99,25 999,25	19,30 99,30 999,30	19,33 99,33 999,33	19,37 99,37 999,37	19,41 99,42 999,42	19,45 99,46 999,46	19,50 99,50 999,50
3	10,13 34,12 167,03	9,55 30,82 148,50	9,28 29,46 141,11	9,12 28,71 137,10	9,01 28,24 134,58	8,94 27,91 132,85	8,85 27,49 130,62	8,74 27,05 128,32	8,64 26,60 125,93	8,53 26,13 123,47
4	7,71 21,20 74,14	6,94 18,00 61,25	6,59 16,69 56,18	6,39 15,98 53,44	6,26 15,52 51,71	6,16 15,21 50,53	6,04 14,80 49,00	5,91 14,37 47,41	5,77 13,93 45,77	5,63 13,46 44,05



## Критические значения критерия Фишера

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	Продолжение табл. 14	
									24	$\infty$
13	4,67 9,07 17,82	3,81 6,70 12,31	3,41 5,74 10,21	3,18 5,21 9,07	3,03 4,86 8,35	2,92 4,62 7,86	2,77 4,30 7,21	2,60 3,96 6,52	2,42 3,59 5,78	2,21 3,17 4,97
14	4,60 8,86 17,14	3,74 6,51 11,78	3,34 5,56 9,73	3,11 5,04 8,62	2,96 4,69 7,92	2,85 4,46 7,44	2,70 4,14 6,80	2,53 3,80 6,13	2,35 3,43 5,41	2,13 3,00 4,60
15	4,54 8,68 16,59	3,68 6,36 11,34	3,29 5,42 9,34	3,06 4,89 8,25	2,90 4,56 7,57	2,79 4,32 7,09	2,64 4,00 6,47	2,48 3,67 5,81	2,29 3,29 5,10	2,07 2,87 4,31
16	4,49 8,53 16,12	3,63 6,23 10,97	3,24 5,29 9,01	3,01 4,77 7,94	2,85 4,44 7,27	2,74 4,20 6,80	2,59 3,89 6,19	2,42 3,55 5,55	2,24 3,18 4,85	2,01 2,75 4,06
17	4,45 8,40 15,72	3,59 6,11 10,66	3,20 5,18 8,73	2,96 4,67 7,68	2,81 4,34 7,02	2,70 4,10 6,56	2,55 3,79 5,96	2,38 3,46 5,32	2,19 3,08 4,63	1,96 2,65 3,85
18	4,41 8,29 15,38	3,55 6,01 10,39	3,16 5,09 8,49	2,93 4,58 7,46	2,77 4,25 6,81	2,66 4,01 6,35	2,51 3,71 5,76	2,34 3,37 5,13	2,15 3,00 4,45	1,92 2,57 3,67
19	4,38 8,18 15,08	3,52 5,93 10,16	3,13 5,01 8,28	2,90 4,50 7,27	2,74 4,17 6,62	2,63 3,94 6,18	2,48 3,63 5,59	2,31 3,30 4,97	2,11 2,92 4,29	1,88 2,49 3,51
20	4,35 8,10 14,82	3,49 5,85 9,95	3,10 4,94 8,10	2,87 4,43 7,10	2,71 4,10 6,46	2,60 3,87 6,02	2,45 3,56 5,44	2,28 3,23 4,82	2,08 2,86 4,15	1,84 2,42 3,38
21	4,32 8,02 14,59	3,47 5,78 9,77	3,07 4,87 7,94	2,84 4,37 6,95	2,68 4,04 6,32	2,57 3,81 5,88	2,42 3,51 5,31	2,25 3,17 4,70	2,05 2,80 4,03	1,81 2,36 3,26

# Критические значения критерия Фишера

182

Продолжение табл. П4

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$
22	4,30 7,95 14,38	3,44 5,72 9,61	3,05 4,82 7,80	2,82 4,31 6,81	2,66 3,99 6,19	2,55 3,76 5,76	2,40 3,45 5,19	2,23 3,12 4,58	2,03 2,75 3,92	1,78 2,31 3,15
23	4,28 7,88 14,20	3,42 5,66 9,47	3,03 4,76 7,67	2,80 4,26 6,70	2,64 3,94 6,08	2,53 3,71 5,65	2,37 3,41 5,09	2,20 3,07 4,48	2,01 2,70 3,82	1,76 2,26 3,05
24	4,26 7,82 14,03	3,40 5,61 9,34	3,01 4,72 7,55	2,78 4,22 6,59	2,62 3,90 5,98	2,51 3,67 5,55	2,36 3,36 4,99	2,18 3,03 4,39	1,98 2,66 3,74	1,73 2,21 2,97
25	4,24 7,77 13,88	3,39 5,57 9,22	2,99 4,68 7,45	2,76 4,18 6,49	2,60 3,85 5,89	2,49 3,63 5,46	2,34 3,32 4,91	2,16 2,99 4,31	1,96 2,62 3,66	1,71 2,17 2,89
26	4,23 7,72 13,74	3,37 5,53 9,12	2,98 4,64 7,36	2,74 4,14 6,41	2,59 3,82 5,80	2,47 3,59 5,38	2,32 3,29 4,83	2,15 2,96 4,24	1,95 2,58 3,59	1,69 2,13 2,82
27	4,21 7,68 13,61	3,35 5,49 9,02	2,96 4,60 7,27	2,73 4,11 6,33	2,57 3,78 5,73	2,46 3,56 5,31	2,31 3,26 4,76	2,13 2,93 4,17	1,93 2,55 3,52	1,67 2,10 2,75
28	4,20 7,64 13,50	3,34 5,45 8,93	2,95 4,57 7,19	2,71 4,07 6,25	2,56 3,75 5,66	2,45 3,53 5,24	2,29 3,23 4,69	2,12 2,90 4,11	1,91 2,52 3,46	1,65 2,06 2,69
29	4,18 7,60 13,39	3,33 5,42 8,85	2,93 4,54 7,12	2,70 4,04 6,19	2,55 3,73 5,59	2,43 3,50 5,18	2,28 3,20 4,64	2,10 2,87 4,05	1,90 2,49 3,41	1,64 2,03 2,64
30	4,17 7,56 13,29	3,32 5,39 8,77	2,92 4,51 7,05	2,69 4,02 6,12	2,53 3,70 5,53	2,42 3,47 5,12	2,27 3,17 4,58	2,09 2,84 4,00	1,89 2,47 3,36	1,62 2,01 2,59

Окончание табл. П4

$v_2 \backslash v_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$
60	4,00 7,08 11,97	3,15 4,98 7,77	2,76 4,13 6,17	2,53 3,65 5,31	2,37 3,34 4,76	2,25 3,12 4,37	2,10 2,82 3,86	1,92 2,50 3,32	1,70 2,12 2,69	1,39 1,60 1,89
$\infty$	3,84 6,63 10,83	3,00 4,61 6,91	2,60 3,78 5,42	2,37 3,32 4,62	2,21 3,02 4,10	2,10 2,80 3,74	1,94 2,51 3,27	1,75 2,18 2,74	1,52 1,79 2,13	1,03 1,04 1,05

Таблица П5

Таблица Фишера – Иейтса. Значения  $r_{кр}$ , найденные для уровня значимости  $\alpha$  и чисел степеней свободы  $v = n - 2$  в случае парной корреляции и  $v = n - l - 2$ , где  $l$  – число исключенных величин в случае частной корреляции

$v$	Двусторонние границы	Двусторонние границы			
		0,05	0,02	0,01	0,001

**Стандартная ошибка моделирования** – это корень из дисперсии остатков. Чем меньше, тем модель точнее. Имеет те же единицы измерения, что и прогнозируемая величина  $Y$ . Показывает средний остаток или среднюю разность между расчетными значениями и фактическими значениями  $Y$ .